Data la funzione di trasferimento $H(s)$ l’uscita con ingresso sinusoidale si calcola facilmente:

$$Y\left(s\right)=H\left(s\right)\*L\left\{cos\right.\left.(w\*t)\right\}$$

Essendo

$$L\left\{cos\right.\left.(w\*t)\right\}=\frac{s}{s^{2}+ω^{2}}$$

Si ha

$$Y\left(s\right)=H\left(s\right)\*\frac{s}{s^{2}+ω^{2}}=H\left(s\right)\*\frac{s}{\left(s-iω\right)\*(s+iω)}$$

Dallo sviluppo in fratti semplice si ha:

$$Y\left(s\right)=\frac{A}{(s-iω)}+\frac{A^{\*}}{(s+iω)}+\sum\_{i=1}^{n}\frac{B\_{i}}{(s-λ\_{i})}$$

Calcoliamo i residui del coseno

$$A=H\left(iω\right)\*\frac{iω}{2\*iω}=\frac{1}{2}H\left(iω\right)$$

$$A^{\*}=H\left(-iω\right)\*\frac{-iω}{-2\*iω}=\frac{1}{2}H\left(-iω\right)$$

antitrasformando

$$y\left(t\right)=\frac{1}{2}H\left(iω\right)\*e^{iωt}+\frac{1}{2}H\left(-iω\right)\*e^{-iωt}+\sum\_{i=1}^{n}B\_{i}\*e^{λ\_{i}\*t}$$

I due termini iniziali rappresentano il regime gli altri il transitorio; consideriamo il regime:

$$y\_{r}\left(t\right)=\frac{1}{2}H\left(iω\right)\*e^{iωt}+\frac{1}{2}H\left(-iω\right)\*e^{-iωt}$$

Ponendo

$$H\left(iω\right)=\left|H(iω)\right|\*e^{i<H(iw)}$$

$$H\left(-iω\right)=\left|H(-iω)\right|\*e^{-i<H(iw)}=\left|H(iω)\right|\*e^{-i<H(iw)}$$

Sostituendo tale espressione nell’equazione della risposta a regime

$$y\_{r}\left(t\right)=\frac{1}{2}\left|H(iω)\right|\*e^{<H(iw)}\*e^{iωt}+\frac{1}{2}\left|H(iω)\right|\*e^{-<H(iw)}\*e^{-iωt}$$

$$y\_{r}\left(t\right)=\frac{1}{2}\left|H(iω)\right|\*e^{i(ωt+<H\left(iw\right))}+\frac{1}{2}\left|H(iω)\right|\*e^{-i(ωt+<H\left(iw\right))}$$

$$y\_{r}\left(t\right)=\frac{1}{2}\left|H(iω)\right|\*\left[\cos(\left(ωt+<H\left(iw\right)\right))+isin(ωt+<H\left(iw\right))\right]+\frac{1}{2}\left|H(iω)\right|\*\left[\cos(\left(ωt+<H\left(iw\right)\right))-isin(ωt+<H\left(iw\right))\right]$$

$$y\_{r}\left(t\right)=\left|H(iω)\right|\*\cos(\left(ωt+<H\left(iw\right)\right))$$

L’ultima espressione mostra che $H\left(iω\right)=\left|H(iω)\right|\*e^{i<H(iw)}$ è la risposta in frequenza ove:

$\left|H(iω)\right|$ è il guadagno alla pulsazione $ω$

$<H\left(iw\right)$ è lo sfasamento alla pulsazione $ω$

In altre parole se con $Y\left(ω\right)$ e $U\left(ω\right)$ si indicano i fasori (numeri complessi che rappresentano le funzioni sinusoidali) si ha

$$\left( \_{s=iω}\right)=H\left(iω\right)=\left|H(iω)\right|\*e^{i<H(iw)}≝\frac{Y(ω)}{U(ω)}$$